BESCHOUWING OVER DE DIMENSIE-ANALYSE.

Nota W-719

DDWT-W-719

RIJKSWATERSTAAT - DELTADIENST WATERLOOPKUNDIGE AFDELING	PAGINA Nº: 1 AANTAL PAGINA'S: 4 AANTAL BIJLAGEN:	NOTA Nº: W- 719

VRAAG GESTELD DOOR: Ir. W.A. Venis
VAN: Waterloopkundige Afdeling
TE: 's-Gravenhage.

MONDELING ~~SCHRIFTELIJK~~ AAN: Ir. J. van de Kreeke
BIJ SCHRIJVEN Nº: d.d. 10 oktober 1963.

VRAAG: Beschouwing over de dimensie-analyse.

REDEN: Opzet modelproeven.

BIJLAGEN:

GEZ. EN ACC.

AANGEBODEN BIJ SCHR. Nº: Onderhands aange~~XXXX~~boden dd. 24 december 1963.
ZONDER OPMERKINGEN VAN HET HOOFD VAN DE WATERLOOPKUNDIGE AFDELING

ANTWOORD:

Dimensie-analyse.

Het doel van de dimensie-analyse is de groepering van de niet-dimensieloze variabelen in een physische betrekking tot dimensieloze variabelen, op zodanige wijze, dat de algemene geldigheid van die physische betrekking niet wordt aangetast.
Dit groeperen tot dimensieloze variabelen heeft de volgende voordelen.

a. De in dimensieloze variabelen gegeven physische betrekking is onafhankelijk van het gekozen eenhedensysteem.
b. Het aantal variabelen wordt, zoals hierna zal blijken, meestal gereduceerd. De physische betrekking kan daardoor eenvoudiger experimenteel worden bepaald.

Beschouw een verschijnsel dat kan worden beschreven door de variabelen Q_1 ...... Q_n waartussen de volgende relatie bestaat

$$f\,(Q_1,\ Q_2\ \ldots\ldots\ Q_n) = 0.$$

Het beginsel van de dimensiehomogeniteit zegt nu dat alle termen van deze functie dezelfde dimensie moeten bezitten, (men kan geen snelheden en versnellingen optellen).
Deelt men de functie door één van de termen dan wordt een functie verkregen waarvan alle termen dimensieloos zijn. Ieder van die dimensieloze termen kan weer zijn opgebouwd uit een aantal dimensieloze factoren, welke ieder voor zich weer het product zijn van een aantal Q's. De dimensieloze factoren of combinaties daarvan kunnen nu worden opgevat als de dimensieloze variabelen waarmee het verschijnsel wordt beschreven. Iedere dimensieloze variabele is dus het product van een aantal niet-dimensieloze variabelen.

In het volgende wordt een afleiding gegeven van het antwoord op de vraag wat het minimum aantal dimensieloze variabelen is, waarmee men het verschijnsel kan beschrijven indien het aantal niet-dimensieloze variabelen gegeven is.
Daartoe wordt het volgende voorbeeld beschouwd (ontleend aan Rouse [1]).
Stel dat de gemiddelde snelheid V in een gladde buis afhankelijk is van de diameter D, de soortelijke massa ρ, de drukgradiënt $\frac{dp}{dx}$, en de viscositeit η, zodanig dat

$$f\,(V,\ D,\ \frac{dp}{dx},\ \rho,\ \eta) = 0.$$

- Hierin -

Hierin is het aantal variabelen n = 5. Het aantal dimensiecategoriën m = 3 (massa, lengte, tijd).
Uit het voorgaande volgt, dat iedere dimensieloze variabele (π) kan worden opgevat als het product van een aantal niet-dimensieloze variabelen.
Dus algemeen $$\pi = D^{x_1} \cdot V^{x_2} \cdot \rho^{x_3} \cdot \left(\frac{dp}{dx}\right)^{x_4} \cdot \eta^{x_5}$$

Voor wat betreft de dimensies kan dit worden geschreven als
$$[\pi] = [L]^{x_1}[L.t^{-1}]^{x_2}[m.L^{-3}]^{x_3}[mL^{-2}t^{-2}]^{x_4}[mL^{-1}t^{-1}]^{x_5} = m^0 L^0 t^0$$
Voorwaarde voor het dimensieloos zijn van π is dat de som van de machten van iedere dimensiecategorie gelijk is aan 0. Dit resulteert in het volgende stelsel simultane vergelijkingen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 &= 0 \\ - x_2 \qquad\quad - 2x_4 - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Een matrix van de coëfficienten van deze vergelijkingen (de dimensiematrix) ziet er als volgt uit.

	D	V	ρ	$\frac{dp}{dx}$	η
l	1	1	-3	-2	-1
t	0	-1	0	-2	-1
m	0	0	1	1	1

De rang k van deze matrix wordt gegeven door de hoogste orde van de onderdeterminant, die niet nul wordt. De omlijnde determinant bijv. = -1, zodat de rang van de matrix = 3. Opgemerkt zij, dat de rang niet steeds behoeft te corresponderen met het aantal dimensiecategoriën.
De algebratheorie zegt nu dat er slechts n-k lineair onafhankelijke oplossingen van de gegeven vergelijkingen zijn.
Het voorgaande kan als volgt worden samengevat in het zg. π theorema.

> Indien n variabelen nodig zijn om een physisch gebeuren te beschrijven en deze variabelen omvatten m dimensiecategoriën, dan kan dit aantal variabelen worden gereduceerd tot n-k dimensieloze variabelen. Hierin is k de rang van de matrix. $k \leq m$. $k < n$.

Dus wat betreft het voorbeeld

$f\,(V, D, \frac{dp}{dx}, \rho, \eta) = 0$ kan worden teruggebracht tot een functie met n-k = 5-3 = 2 dimensieloze variabelen.

$$f\,(\pi_1, \pi_2) = 0.$$

Hoe kunnen nu π_1 en π_2 bepaald worden? Uit het feit dat de omlijnde determinant $\neq 0$ volgt dat er geen afhankelijkheid bestaat tussen x_1, x_2 en x_3. De oplossing van x_1, x_2 en x_3 met x_4 en x_5 als parameters luidt dan als volgt.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_4 - x_5 \\ x_2 &= -2x_4 - x_5 \\ x_3 &= -x_4 - x_5. \end{aligned}$$

Dus $\pi = D^{x_4 - x_5} \, . \, V^{-2x_4 - x_5} \, . \, \rho^{x_4 - x_5} \, . \, \frac{dp}{dx}^{x_4} \, . \, \eta^{x_5}$

- of -

of

$$\Pi = (D.V^{-2}.\rho.\frac{dp}{dx})^{x_4}(D^{-1}.V^{-1}.\rho^{-1}.\eta)^{x_5}$$

Dit geeft met $x_4 = 1$ $x_5 = 0$ en $x_4 = 0$ $x_5 = 1$

$$\Pi_1 = D.V^{-2}.\rho.\frac{dp}{dx}$$

$$\Pi_2 = D^{-1}.V^{-1}.\rho^{-1}.\eta$$

Alle andere waarden van x_4 en x_5 geven van Π_1 of Π_2 afhankelijke dimensieloze producten.

De physische betrekking kan nu dus worden geschreven als $f\left(\frac{\eta}{\rho DV}, \frac{D\frac{dp}{dx}}{V^2\rho}\right) = 0$.

De gevonden Π_1 en Π_2 mogen onderling weer worden vermenigvuldigd, zodat bijv. ook de volgende dimensieloze variabelen kunnen worden ingevoerd.

$$\Pi_1 . \Pi_2 \; , \; \Pi_2$$

$$\rightarrow \quad \frac{\eta\frac{dp}{dx}}{\rho^2 V^3} \quad \text{en} \quad \frac{D\frac{dp}{dx}}{V^2\rho}$$

Opm. a. Uit de dimensie-analyse kan dadelijk worden bepaald of een variabele ten onrechte is gekozen of dat het aantal onjuist is. Dit moge blijken uit het volgende voorbeeld.
Stel dat de vrije val in een luchtledig afhangt van de versnelling van de zwaartekracht g, de valhoogte h en de soortelijke massa ρ dus
$f(v, g, h, \rho) = 0$.
De dimensiematrix wordt

	v	g	h	ρ
m	0	0	0	1
l	1	1	1	-3
t	-1	-2	0	0

Beschouwing van de matrix leert dat de exponent van ρ = 0 wordt. De ρ verdwijnt dus uit de physische relatie.

Algemeen: Wordt een dimensiecategorie slechts in één van de variabelen gebruikt dan wordt de exponent van die dimensie 0 en verdwijnt de variabele van die dimensie. Dan is dus de variabele ten onrechte gekozen of het stelsel variabelen is niet compleet.
Het voorgaande volgt trouwens ook direct uit de voorwaarde van de dimensiehomogeniteit. De niet-dimensieloze variabele welke een dimensiecategorie bezit welke alleen in die variabele voorkomt, zal in alle termen van de physische relatie tot dezelfde macht moeten voorkomen en kan dus worden weggedeeld.

b. Er kunnen zich problemen voordoen, waarbij in het experiment bepaalde grootheden constant zijn, terwijl ze toch het probleem beinvloeden. (Bijv. in een modelproef de versnelling van de zwaartekracht). Deze grootheden moeten in de dimensie-analyse wel worden ingevoerd, daar het meer de relatieve waarde in de dimensieloze groep is, dan de absolute waarde welke van betekenis is. (Bijv. het getal van Froude $\frac{v^2}{gd}$).

c. In de dimensie-analyse voor één physische relatie mag er nooit meer dan één afhankelijk variabele zijn. Dit is een voorwaarde waarvan het bewijs hier achterwege wordt gelaten.

's-Gravenhage, 23 december 1963.

(Ir. J. van de Kreeke)

Literatuur.

1. H. Rouse — Advanced Mechanics of Fluids.
2. E. Buckingham, Physical Review, Second series, vol.4, 1914, pp 345-377 — On physical similar systems: Illustrations of the use of dimensional equations.
3. E.R. van Driest, Journal of applied mechanics, vol.13, nr.1, maart 1946. — On dimensional analysis and the presentation of data in fluid-flow problems.