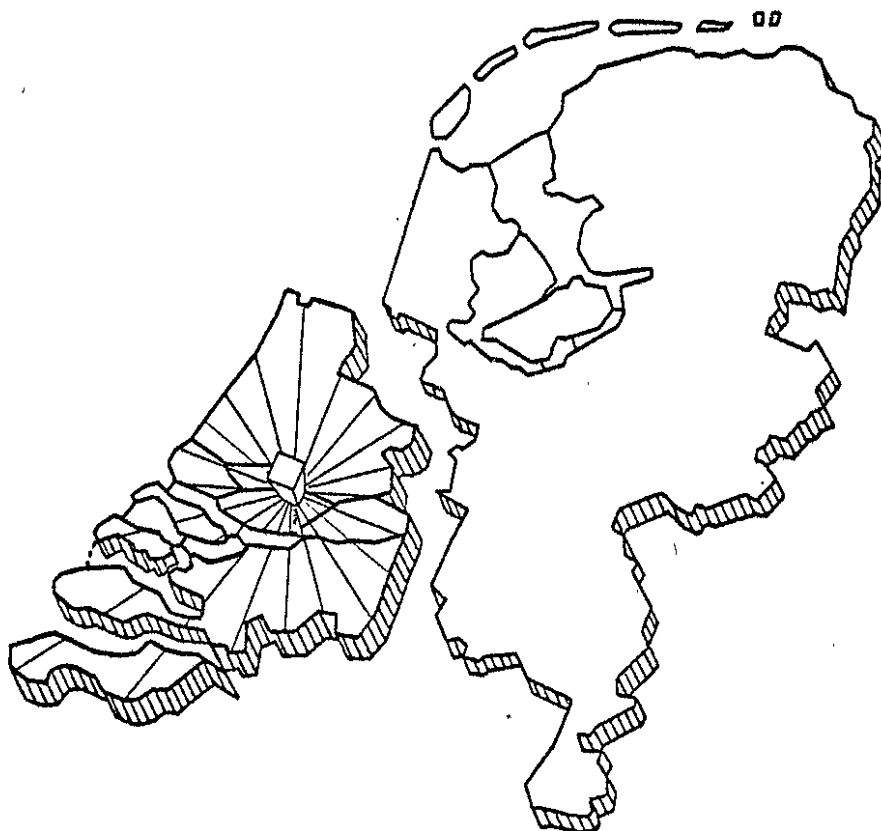


ÉÉNDIMENSIONAAL MODEL VOOR
HET DYNAMISCH EN SIMULTAAN
OPLOSSEN VAN DE WATERBEWE-
GINGS- EN CONVECTIE/DIFFU-
SIEVERGELIJKING IN EEN
NETWERK

WWZW

Project 11.004.07



Directie Waterhuishouding
en Waterbeweging
District Zuidwest
Juli 1980

INHOUD

=====

	<u>Blz.</u>
1. Gebruikte symbolen	1
2. Literatuuropgave	3
3. Inleiding	4
4. De vergelijkingen	5
5. De randvoorwaarden	6
6. Discretisatie	7
7. Dispersiecoëfficiënt	13
8. Nauwkeurigheid	14

Bijlage 1: Velocity en decayfactoren.

Bijlage 2: Resultaten proefberekeningen.

Appendix 1: Systeemdocumentatie.

1. LIJST VAN GEBRUIKTE SYMBOLEN

=====

- A stroomvoerend oppervlak (m^2)
- A_ω Fourierreeks-coëfficiënt [vgl. 9]
- B kombergende breedte (m)
- C coëfficiënt van Chézy ($m^{1/2}/s$)
- c chloridegehalte (kg/m^3)
- c_{zee} chloridegehalte mond NWW 19 kg/m^3 [vgl. 7]
- d diepte mond Waterweg: 17m [vgl. 7]
- E dispersiecoëfficiënt (m^2/s)
- h waterstand boven een gegeven horizontaal referentievlak (m)
- H_w gemiddelde waterdiepte (m)
- I helling van de geulas ten opzichte van horizontaal vlak
- K_1, K_2 ijkvariabelen in de uitdrukking voor de dispersiecoëfficiënt [vgl. 7]
- L golflengte (m)
- L_e estuariumlengte (= 100 km) [vgl. 7]
- P_t gemiddelde van de laatste 4 vloedvolumina (m^3) [vgl. 7]
- p druk (N/m^2)
- Q debiet (m^3/s)
- Q_t gemiddelde afvoer over laatste 4 getijden (m^3/s) [vgl. 7]
- R hydraulische straal (m)
- T duur van een getijperiode (= 44700 s) [vgl. 7]
- T_o tijdspanne tussen kentering LW tot bereiken c_{zee} (s)
- t tijd (s)
- Δt tijdstap (s)
- \bar{v}_o gemiddeld maximale stroomsnelheid van de laatste 4 vloedperiodes (m/s) [vgl. 7]
- v stroomsnelheid (m/s)
- W windsnelheid (m/s)
- x afstand (m)
- Δx ruimtestap (m)
- α gewichtsfactor [vgl. 5]
- γ windconversiecoëfficiënt
- δ windrichting ten opzichte van geulas
- ρ dichtheid (kg/m^3)
- $\Delta\rho$ dichtheidsverschil (kg/m^3)
- ϕ velocity-factor [vgl. 10]
- ψ decay-factor [vgl. 11]

ω golfgetal ($= \frac{2\pi}{L}$) [vgl. 9]

2. LITERATUUROPGAVE

=====

1. Systeemdocumentatie IMPLIC40
Rijkswaterstaat Dienst Informatieverwerking.

2. J.E. Dailey and D.R.F. Harleman
'Numerical model for the prediction of transient water quality in estuary networks'
Report no. 158, Ralph M. Parsons Laboratory, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, October 1972.

3. H.L. Stone and P.L.T. Brian
'Numerical solution of convective transport problems'
Journal of the American Institute of Chemical Engineers, Vol. 9, No. 5, Sept. 1963 pp 681-688.

4. M.L. Thatcher and D.R.F. Harleman
'A mathematical model for the prediction of unsteady salinity intrusion in estuaries'
Report no. 144, Ralph M. Parsons Laboratory, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, February 1972.

3. INLEIDING

=====

Voor de waterhuishouding in het noordelijk deltabekken zijn vraagstukken aan de orde waarbij de zoutindringing een belangrijke rol speelt. Voor de bestudering van dergelijke vraagstukken is het wenselijk te beschikken over toepasselijke rekentechnieken. Met betrekking tot de zout/zoet-problematiek zijn bij het district Zuidwest twee mathematische modellen in gebruik, te weten 'Van der Burgh', een ééndimensionaal stationair model, en 'ZRW', een ééndimensionaal dynamisch éénknooppuntsmodel, beide bedoeld voor berekeningen van de zoutindringing op de Rotterdamse Waterweg. Naast bovengenoemde modellen en hydraulische modellen bestaat behoefte aan een mathematisch model voor het doorrekenen van netwerken over langere perioden. Voor de beoogde toepassing is het model DIACIM minder doelmatig gebleken. Dit was de aanleiding tot de bouw van het programma ZWENDEL. Het programma is gebaseerd op het programma IMPLIC40, een ééndimensionaal getijmodel, en kan gezien worden als een uitbreiding daarop. Een bijkomend voordeel is dat - ten gevolge van het feit dat waterbeweging en zoutindringing simultaan worden berekend - het effect van dichtheidsverschillen verdisconteerd kan worden in de berekening van de waterbeweging. De programmanaam ZWENDEL is een mnemonic voor Zout- en Waterbeweging Eéndimensionaal Noordelijk DELtabekken.

4. DE VERGELIJKINGEN

Uitgangspunt vormen de vergelijkingen voor niet-stationaire stroming en de convectie/diffusievergelijking, alle voor het ééndimensionale geval:

- de bewegingsvergelijking:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (Q \cdot v)}{\partial x} + \frac{A}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{A g v |v|}{C^2 \cdot R} = \frac{A \gamma W^2 \cos \delta}{H_w} \quad (1)$$

- de continuïteitsvergelijking:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{B}{\cos(I)} \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

- de convectie/diffusievergelijking:

$$\frac{\partial cA}{\partial t} + \frac{\partial cQ}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial c}{\partial x} \right] \quad (3)$$

Het verband tussen ρ en c wordt gelegd via de (empirische) toestandsvergelijking:

$$\rho = 1.32 c + 1000$$

5. DE RANDVOORWAARDEN

=====

Concentraties:

Afhankelijk van de richting van het debiet ter plaatse wordt voor een rand één van de volgende 2 typen voorwaarden toegepast:

I) bij uitstroming: $\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0$

II) bij instroming : voor het randpunt wordt een gehalte opgegeven; gedurende een periode van T_0 -uur vanaf het moment van kentering verloopt het gehalte van de waarde bij kentering 'via een cosinus' naar een opgegeven niveau, waarna het randgehalte op dit (of een tussentijds herzien) niveau blijft gehandhaafd tot de eerstvolgende kentering.

Waterbeweging:

Zie systeemdocumentatie IMPLIC40 [lit. 2].

6. DISCRETISATIE
=====

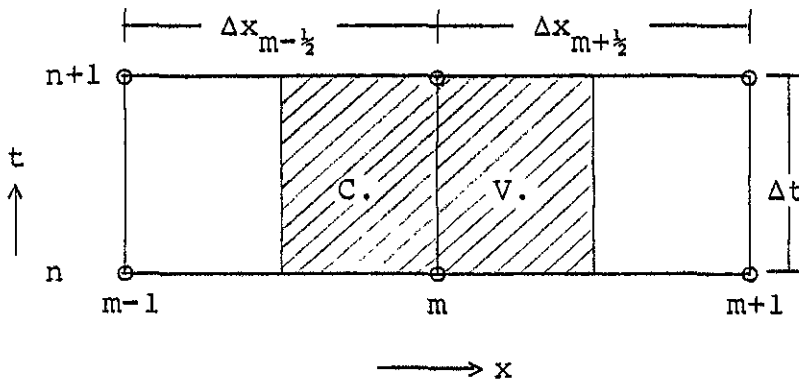
Elke rekenstap in de tijd wordt in twee fasen uitgevoerd:

- I) oplossen van de waterbewegingsvergelijkingen (1) en (2),
- II) oplossen van de convectie/diffusievergelijking (3).

De dichtheden benodigd gedurende fase I) worden afgeleid uit de chloridegehalten op het oude tijdstip (in het programma kan het verdisconteren in de waterbeweging van het effect van deze dichtheidsverschillen desgewenst onderdrukt worden).

De vergelijkingen (1) en (2) worden gediscretiseerd als aangegeven in de systeemdokumentatie van IMPLIC40 [lit. 1] en hieraan wordt in het nu volgende geen aandacht besteed. Voor de discretisatie van (3) is uitgegaan van een door J.E. Daily en D.R.F. Harleman gerealiseerd model als beschreven in lit. 2.

D & H leidden hun model af met behulp van de eindige elementenmethode. De resulterende vergelijkingen kunnen ook worden weergegeven in een fysisch meer verstaanbare vorm die nauw aansluit bij die van lit. 4, waarbij rond elk inwendig roosterpunt een zgn. control volume wordt gedacht waarvoor een massabalansvergelijking wordt uitgeschreven. Voor het onderstaande zespuntsmolecuul luidt de vergelijking dan:



Toename hoeveelheid zout in CV gedurende Δt

$$\left[\frac{\Delta x_{m-\frac{1}{2}}}{2} A_{m-\frac{1}{2}}^{n+1} \left\{ \frac{1}{3} c_{m-1}^{n+1} + \frac{2}{3} c_m^{n+1} \right\} + \frac{\Delta x_{m+\frac{1}{2}}}{2} A_{m+\frac{1}{2}}^{n+1} \left\{ \frac{1}{3} c_{m+1}^{n+1} + \frac{2}{3} c_m^{n+1} \right\} \right] -$$

$$\left[\frac{\Delta x_{m-\frac{1}{2}}}{2} A_{m-\frac{1}{2}}^n \left\{ \frac{1}{3} c_{m-1}^n + \frac{2}{3} c_m^n \right\} + \frac{\Delta x_{m+\frac{1}{2}}}{2} A_{m+\frac{1}{2}}^n \left\{ \frac{1}{3} c_{m+1}^n + \frac{2}{3} c_m^n \right\} \right]$$

=

=
gedurende Δt binnenkomende hoeveelheid zout ten gevolge van
advectief transport

$$\Delta t \left\{ \left[Q_{m-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{c_{m-1}^{n+1} + c_m^{n+1} + c_{m-1}^n + c_m^n}{4} \right) \right] - \right. \\ \left. \left[Q_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{c_m^{n+1} + c_{m+1}^{n+1} + c_m^n + c_{m+1}^n}{4} \right) \right] \right\} \quad (4)$$

+
gedurende Δt binnenkomende hoeveelheid zout ten gevolge van
dispersief transport

$$\Delta t \left\{ - \left[(EA)_{m-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{c_m^n - c_{m-1}^n + c_m^{n+1} - c_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x_{m-\frac{1}{2}}} \right) \right] \right. \\ \left. + \left[(EA)_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{c_{m+1}^n - c_m^n + c_{m+1}^{n+1} - c_m^{n+1}}{2\Delta x_{m+\frac{1}{2}}} \right) \right] \right\}$$

Hierin is de $\frac{\partial}{\partial x} (EA \frac{\partial c}{\partial x})$ term uit vgl. (3) benaderd op
 $t = (n+\frac{1}{2}) \Delta t$. Om redenen waarop in paragraaf 8 zal worden in-
gegaan is in ZWENDEL een parameter ingebouwd, waarmee deze
term naar keuze kan worden benaderd tussen de uitersten
 $t = (n+\frac{1}{2}) \Delta t$ [\equiv centraal] en $t = (n+1) \Delta t$ [\equiv volledig voor-
waarts]. Vergelijking (4) wijzigt dan als volgt:

$$\frac{1}{2} \left[\Delta x_{m-\frac{1}{2}} \cdot A_{m-\frac{1}{2}}^{n+1} \left\{ \frac{1}{3} c_{m-1}^{n+1} + \frac{2}{3} c_m^{n+1} \right\} + \Delta x_{m+\frac{1}{2}} \cdot A_{m+\frac{1}{2}}^{n+1} \left\{ \frac{1}{3} c_{m+1}^{n+1} + \frac{2}{3} c_m^{n+1} \right\} \right] \\ - \frac{1}{2} \left[\Delta x_{m-\frac{1}{2}} \cdot A_{m-\frac{1}{2}}^n \left\{ \frac{1}{3} c_{m-1}^n + \frac{2}{3} c_m^n \right\} + \Delta x_{m+\frac{1}{2}} \cdot A_{m+\frac{1}{2}}^n \left\{ \frac{1}{3} c_{m+1}^n + \frac{2}{3} c_m^n \right\} \right] \\ = \\ \Delta t \left\{ \left[Q_{m-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{c_{m-1}^{n+1} + c_m^{n+1} + c_{m-1}^n + c_m^n}{4} \right) \right] - \right. \\ \left. \left[Q_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{c_m^{n+1} + c_{m+1}^{n+1} + c_m^n + c_{m+1}^n}{4} \right) \right] \right\} \quad (5)$$

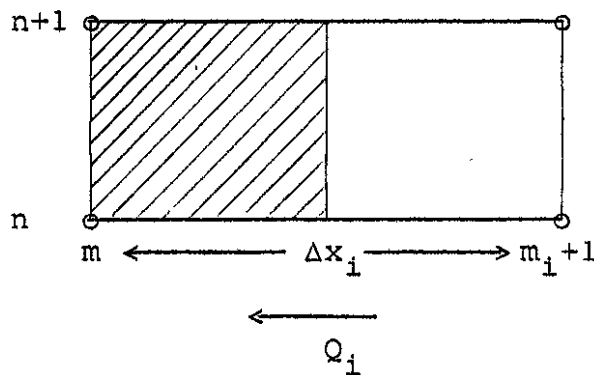
+

$$\Delta t \left\{ - \left[(EA)_{m-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha(c_m^n - c_{m-1}^n) + (1-\alpha)(c_m^{n+1} - c_{m-1}^{n+1})}{\Delta x_{m-\frac{1}{2}}} \right) \right] \right. \\ \left. + \left[(EA)_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha(c_{m+1}^n - c_m^n) + (1-\alpha)(c_{m+1}^{n+1} - c_m^{n+1})}{\Delta x_{m+\frac{1}{2}}} \right) \right] \right\}$$

Voor de keuze $\alpha = \frac{1}{2}$ stemt (5) volledig overeen met (4).
 Voor $\alpha = 0$ wordt de term volledig voorwaarts benaderd.

Vergelijking (5) geldt voor een roosterpunt waarin 2 'vakken' samenkomen. Voer nu de volgende notatie in:

voor een zeker vak i is de 'bijdrage' aan de knooppuntsvergelijking voor knoop m :

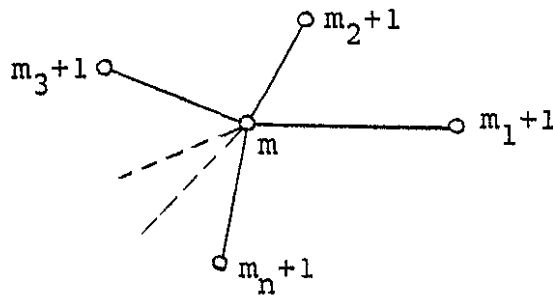


$$ACC_i = \frac{1}{2} \Delta x_i \left[A_i^{n+1} \left\{ \frac{1}{3} c_{m_i+1}^{n+1} + \frac{2}{3} c_m^{n+1} \right\} - A_i^n \left\{ \frac{1}{3} c_{m_i+1}^n + \frac{2}{3} c_m^n \right\} \right]$$

$$ADV_i = \Delta t \left[Q_i^{n+\frac{1}{2}} \frac{c_m^{n+1} + c_{m_i+1}^{n+1} + c_m^n + c_{m_i+1}^n}{4} \right]$$

$$DISP_i = \Delta t \left[(EA)_i^{n+\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\alpha(c_{m_i+1}^n - c_m^n) + (1-\alpha)(c_{m_i+1}^{n+1} - c_m^{n+1})}{\Delta x_i} \right\} \right]$$

Voor het control volume rond roosterpunt m waarin de vakken 1 tot en met n samenkomen geldt dan:



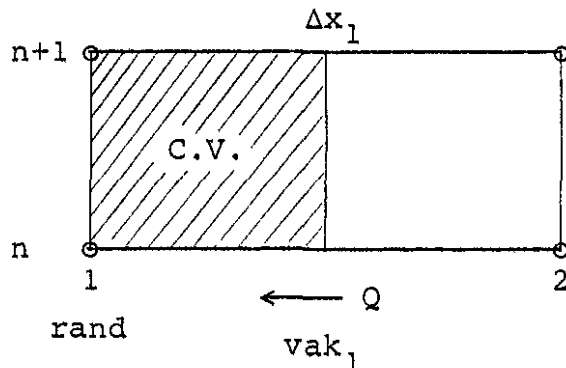
$$\sum_{i=1}^n ACC_i = \sum_{i=1}^n ADV_i + \sum_{i=1}^n DISP_i, \quad n \geq 1 \quad (6)$$

De randvoorwaardenbehandeling is als volgt:

Op elke rekenstap wordt geverifieerd of een kentering heeft plaatsgevonden en zo ja dan wordt met behulp van lineaire interpolatie het kenteringsmoment bepaald.

Indien op het nieuwe tijdstip het debiet instromend is dan wordt conform paragraaf 5 een randvoorwaarde van het type II) toegepast. In het geval van uitstroming wordt een randvoorwaarde van het type I) toegepast.

De discretisatie van deze laatste vindt in principe plaats conform de in lit. 4 aangegeven methode. Uitgewerkt voor ZWENDEL levert dit de vergelijking:



$$\begin{aligned}
 ACC_1 &= ADV_1 + DISP_1 \\
 &- \Delta t \cdot Q_1^{n+\frac{1}{2}} \left\{ \frac{c_1^{n+1} + c_1^n}{2} \right\} \\
 &- \Delta t \cdot (EA)_1^{n+\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\alpha(c_2^n - c_1^n) + (1-\alpha)(c_2^{n+1} - c_1^{n+1})}{\Delta x_1} \right\}
 \end{aligned}$$

Ten behoeve van puntlozingen en -onttrekkingen wordt vgl. (6) als volgt gemodificeerd:

- lozing: indien in het roosterpunt m een zoutlast ter grootte Z kg/s plaats heeft dan wordt (6):

$$\sum_{i=1}^n ACC_i = \sum_{i=1}^n ADV_i + \sum_{i=1}^n DISP_i + Z \cdot \Delta t$$

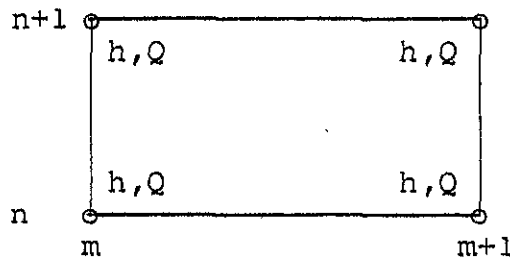
- onttrekking: indien in het roosterpunt m een onttrekking plaatsvindt ter grootte Q_{onttr} m³/s dan wordt (6) als volgt gemodificeerd:

$$\sum_{i=1}^n ACC_i = \sum_{i=1}^n ADV_i + \sum_{i=1}^n DISP_i - \Delta t \cdot Q_{onttr} \left(\frac{c_m^{n+1} + c_m^n}{2} \right)$$

In het voorgaande is voor elk roosterpunt een lineaire vergelijking gegeven waarin de c's op het nieuwe tijdstip de onbekenden zijn. Tezamen levert dit voor iedere tijdstap een stelsel lineaire vergelijkingen dat met behulp van Gauss-eliminatie wordt opgelost.

Opmerkingen

I) In het aan ZWENDEL ten grondslag liggende IMPLIC-rekenrooster



is de benodigde $Q_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ niet rechtstreeks beschikbaar. Deze wordt benaderd door

$$Q_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{Q_m^{n+1} + Q_{m+1}^{n+1} + Q_m^n + Q_{m+1}^n}{4}$$

II) Met betrekking tot de waterbeweging worden vervalsecties in IMPLIC gekenmerkt door een lengte 0. Voor de berekening van chloridegehalten is het in ZWENDEL noodzakelijk voor deze vakken een (desnoods fictieve) lengte in te voeren. In geopende toestand wordt de vervalsectie dan behandeld als elk ander intern vak met dien verstande dat de dispersiecoëfficiënt hier constant wordt verondersteld en als zodanig in de schematisatie wordt opgegeven. In gesloten toestand worden de takken ter weerszijden als doodlopende takken behandeld. Indien op het moment van openen het concentratieverschil over de vervalsectie groot is dan kan de gevolgde rekenprocedure aanleiding geven tot onbetrouwbare resultaten.

7. DISPERSIECOËFFICIËNT

=====

Voor de dispersiecoëfficiënt $E_{x,t}$ wordt gebruik gemaakt van de uitdrukking

$$E_{x,t} = K_1 \frac{L_e^2}{c_{zee}} \left[gT \frac{\Delta\rho}{\rho} \right]^{\frac{1}{4}} \left[\frac{\bar{v}_o^2 Q_f}{P_t} d \right]^{\frac{1}{4}} \left| \frac{\partial c}{\partial x} \right| + K_2 \quad (7)$$

Introductie van (7) in (3) veroorzaakt een niet-lineariteit. Bij de discretisatie wordt conform lit. 4 om deze reden de $\frac{\partial c}{\partial x}$ uit (7) geëvalueerd op het 'oude' tijdstip.

Gezien het feit dat de grootheden Q_f , \bar{v}_o en P_t eerst na 4 volledige getijden uit de waterbeweging berekend kunnen worden, wordt gedurende de daaraan voorafgaande periode met geschatte waarden hiervoor gewerkt. Deze waarden zijn:

$$\begin{aligned} Q_f &= 1.000 \text{ m}^3/\text{s} \\ \bar{v}_o &= 1 \text{ m/s} \\ P_t &= 60.000.000 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Deze waarden zijn geënt op de situatie in de mond van de Nieuwe Waterweg en kunnen met behulp van stuurinvoer vervangen worden door betere schattingen indien deze bekend zijn.

Overigens:

$$\begin{aligned} L &= 10^5 \text{ m} \\ c_{zee} &= 19 \text{ kg/m}^3 \\ g &= 9.81 \text{ m/s}^2 \\ T &= 44.700 \text{ s} \\ \frac{\Delta\rho}{\rho} &= 0.023 \\ d &= 17 \text{ m} \end{aligned}$$

8. NAUWKEURIGHEID

Met betrekking tot de nauwkeurigheid is door H. Stone & P. Brian (lit. 3) onderzoek verricht naar eigenschappen van diverse rekenschema's voor het oplossen van de convectie/diffusievergelijking met constante coëfficiënten:

$$E \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

Uitgangspunt daarbij is de volgende Fourierreeks-representatie van de exacte continue concentratieverdeling:

$$c(x,t) = \sum_{\omega=1}^{\infty} A_{\omega} e^{-\omega^2 Et} e^{i\omega(x-vt)} \quad (9)$$

waarin $\omega = \frac{2\pi}{L}$

De mate, waarin een te onderzoeken rekenschema deze benadert, is uit te drukken in een 'velocity-factor' (ϕ) en een 'decay-factor' (ψ).

De velocity-factor geeft voor de afzonderlijke Fouriercomponenten de mate aan waarin de voortplantingssnelheid wordt gerepresenteerd en behoort in principe 1 te zijn. De decay-factor is op soortgelijke wijze een maat voor de demping na een zeker tijdsverloop t , waarvan de theoretische waarde wordt gegeven door de vorm:

$$e^{-\omega^2 Et}$$

Voor ϕ en ψ zijn uitdrukkingen af te leiden welke uitsluitend afhankelijk blijken van het gekozen rekenschema en de grootheden $\omega\Delta x$, $\frac{v\Delta t}{\Delta x}$ en $\frac{E\Delta t}{\Delta x^2}$.

Voor een aequidistant zespuntsmolecuul met willekeurige gewichten met betrekking tot de benadering van de $\frac{\partial c}{\partial t}$ en de $\frac{\partial c}{\partial x}$ termen en met een centrale Crank Nicholson-representatie van de $\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$ term hebben S & B algemene uitdrukkingen afgeleid voor ϕ en ψ .

Met de in ZWENDEL gebruikte gewichten levert dit (zie ook lit. 2 paragraaf 3.1.4) de volgende uitdrukkingen:

$$\phi = \frac{1}{-\omega v \Delta t} \left(\arctan \frac{k}{s} - \arctan \frac{r}{q} \right) \quad (10)$$

$$\text{en } \psi = \sqrt{\frac{s^2 + k^2}{q^2 + r^2}} \quad (11)$$

met:

$$s = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos \omega \Delta x - 2 \xi \sin^2 \frac{\omega \Delta x}{2}$$

$$k = -\frac{v}{2} \sin \omega \Delta x$$

$$q = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos \omega \Delta x + 2 \xi \sin^2 \frac{\omega \Delta x}{2}$$

$$r = \frac{v}{2} \sin \omega \Delta x$$

$$\text{waarin } \xi = \frac{E \Delta t}{\Delta x^2} \quad \text{en} \quad v = \frac{v \Delta t}{\Delta x}$$

Indien de representatie van de $\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$ term volledig voorwaarts in de tijd wordt genomen [dit wil zeggen op $t = (n+1)\Delta t$] valt af te leiden dat in de bovenstaande formules de s en de q als volgt wijzigen:

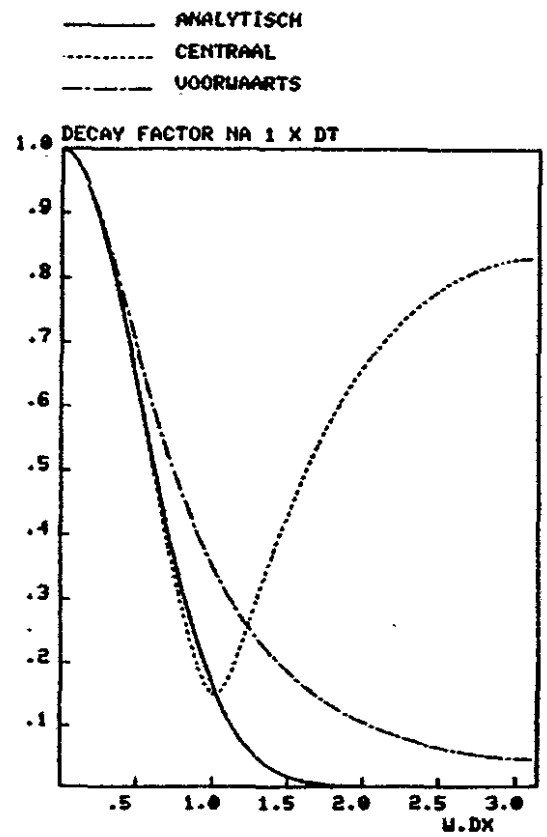
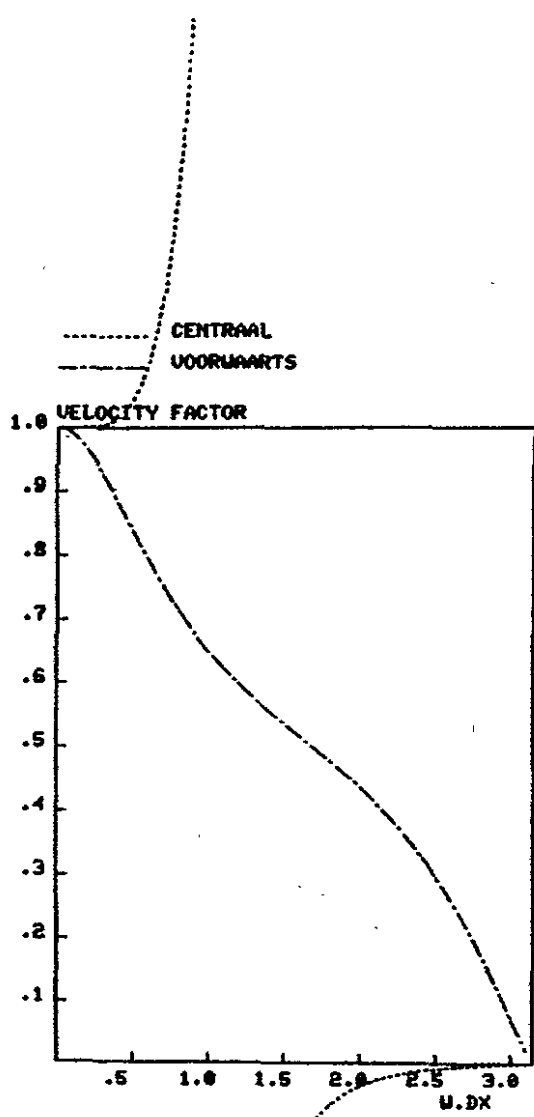
$$s = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos \omega \Delta x$$

$$q = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos \omega \Delta x + 4 \xi \sin^2 \frac{\omega \Delta x}{2}$$

Voor beide rekenschema's zijn voor diverse waarden van Δx , Δt en E de grafieken vervaardigd van het verloop van ϕ en ψ als functie van $\omega \Delta x$ (zie bijlage 1). Voor bepaalde combinaties van deze grootheden, zoals deze voorkomen in de beoogde toepassing van het model (omstandigheden noordelijk deltabekken), blijkt het 'centrale' schema de onplezierige eigenschap te bezitten dat de hoge frequenties veel te weinig worden gedempt. Bij proefberekeningen is het effect hiervan ondervonden: stoorgolven (vermoedelijk veroorzaakt door de lineaire implementatie van het dispersieconcept, zie paragraaf 7) veroorzaakten onder omstandigheden ongewenst grote oscillaties in de numerieke oplossing.

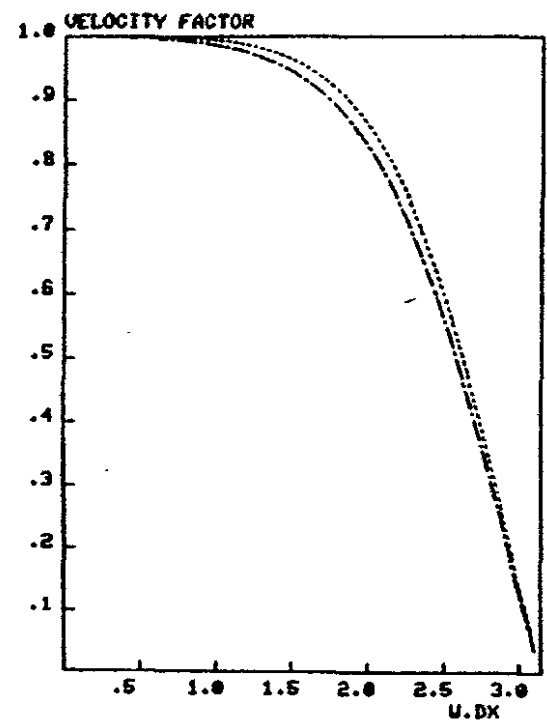
Het 'voorwaartse' schema blijkt deze ongewenste eigenschap niet te bezitten, hoewel de nauwkeurigheid met name voor wat betreft de velocity-factor minder blijkt. Proefberekeningen laten echter zien dat voor de beoogde toepassing van deze mindere nauwkeurigheid in de oplossing praktisch niets is terug te vinden, zodat het 'voorwaartse' schema hier de voorkeur verdient. Enkele resultaten van de proefberekeningen zijn opgenomen als bijlage 2.

N.B. Het is aan te raden voor elke wezenlijk andere toepassing (bijvoorbeeld indien de dispersiecoëfficiënt veel lager ligt dan op de Nieuwe Waterweg) opnieuw een afweging te maken met betrekking tot de discretisatie van het probleem en de instelling van de wegingsfactor voor de benadering van de $\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$ term. (Een hulpmiddel hierbij is het programma STOBRI op de bibliotheek ABS, waarmee de figuren als in bijlage 1 kunnen worden vervaardigd).

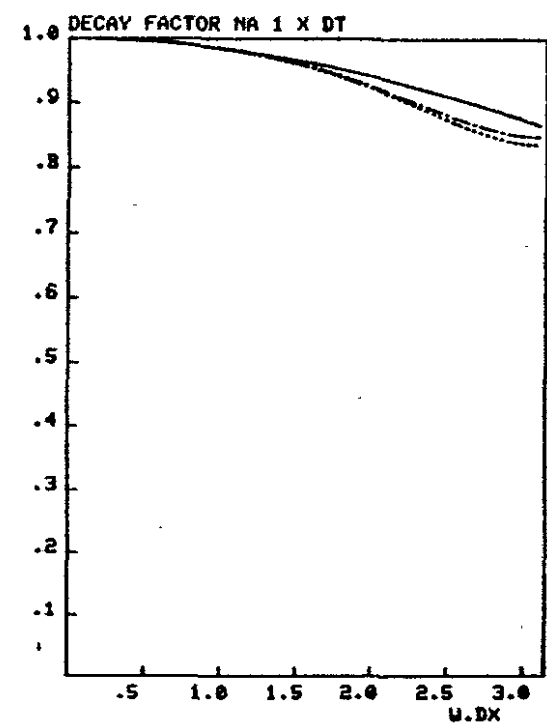


DX DT E U
 PRRPPRRR PRRRRRRR RRRRRRRR RRRRRRRR
 : 1000. 600. 3000. 1.

..... CENTRAAL
 - - - - - VOORWAARTS

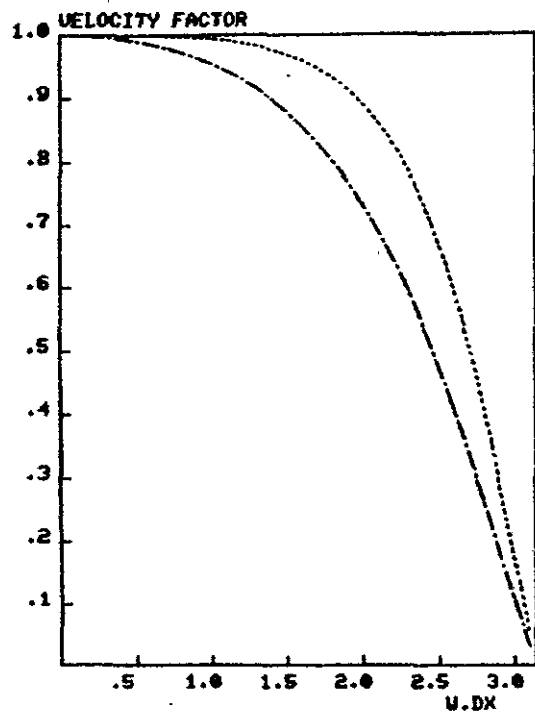


———— ANALYTISCH
 CENTRAAL
 - - - - - VOORWAARTS

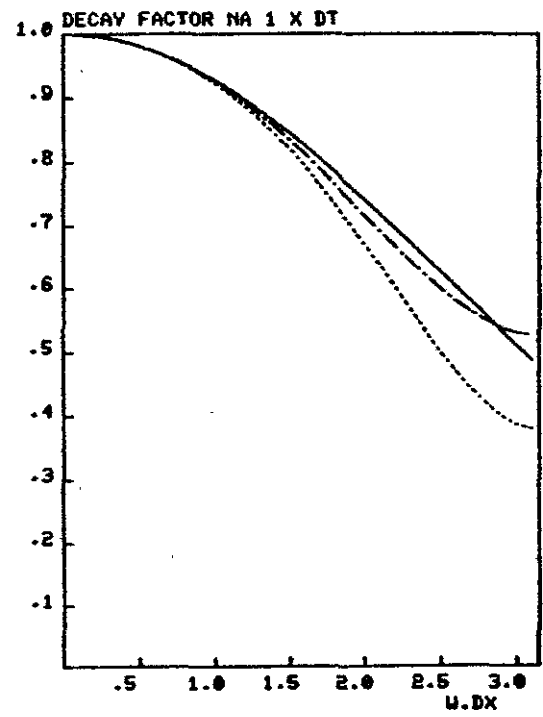


DX DT E U
 RRRRRRRR RRRRRRRR RRRRRRRR RRRRRRRR
 2000. 60. 1000. 1.

..... CENTRAAL
 - - - - - VOORUAARTS

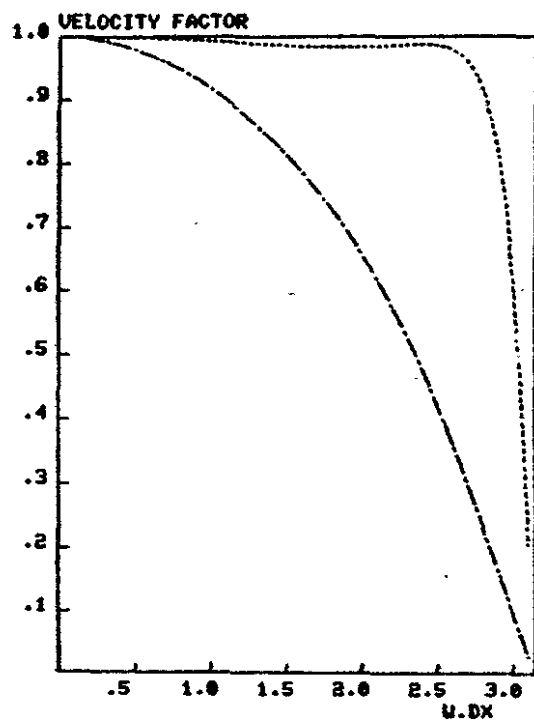


———— ANALYTISCH
 CENTRAAL
 - - - - - VOORUAARTS

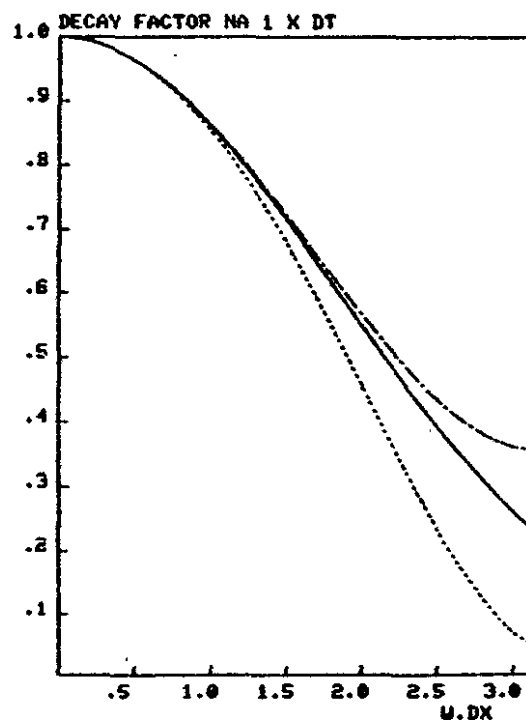


DX	DT	E	U
2000.	300.	1000.	1.

----- CENTRAAL
 - - - - - VOORUAARTS

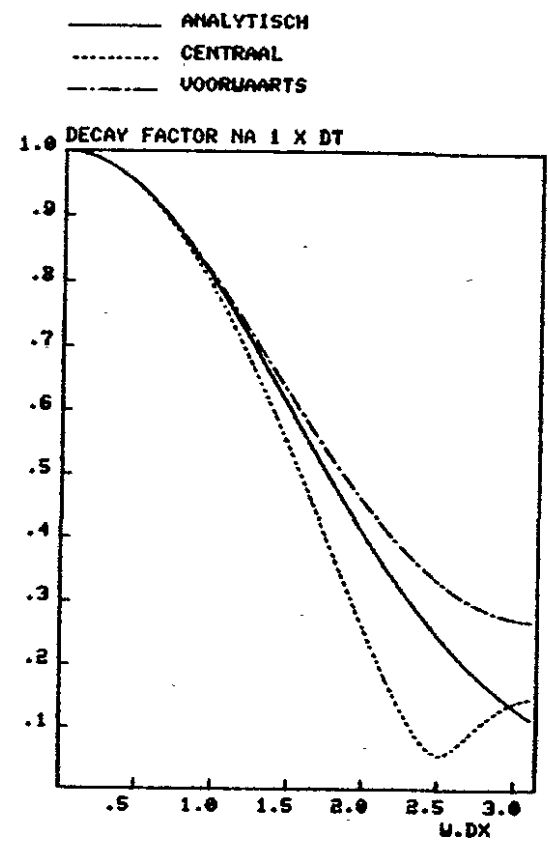
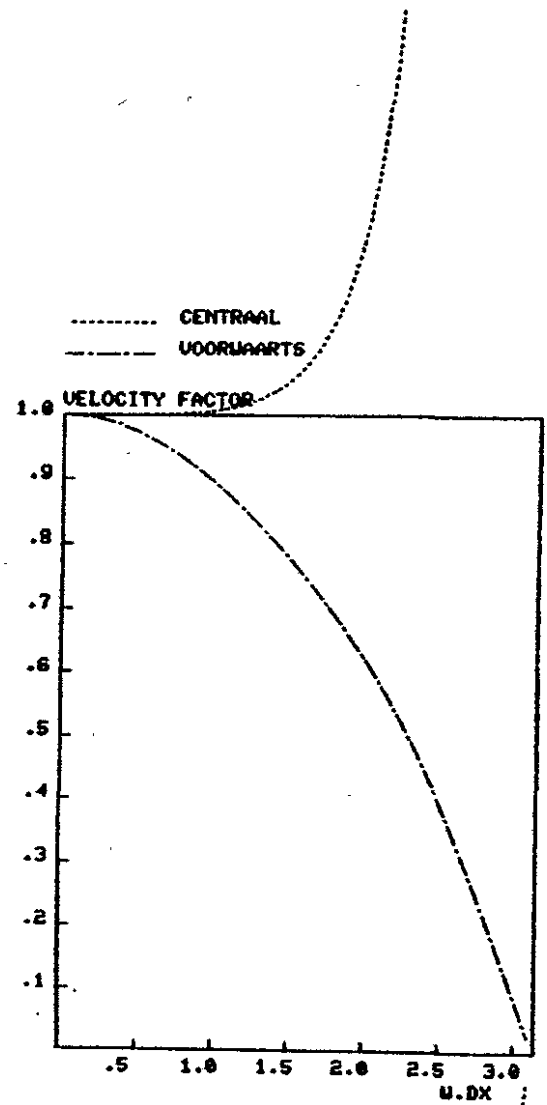


_____ ANALYTISCH
 CENTRAAL
 - - - - - VOORUAARTS



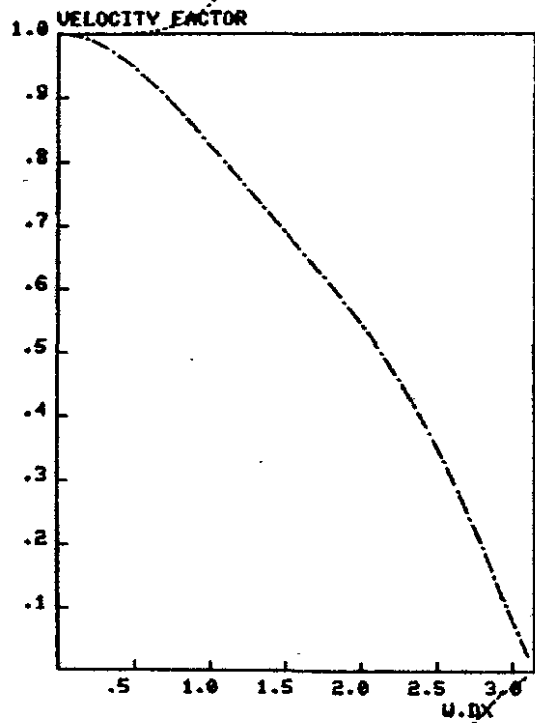
DX DT E U
 RRRRRPPRR RRRRRRRPP RRRRRRPPR RRRRRRRR
 > 2000. 600. 1000. 1.

>

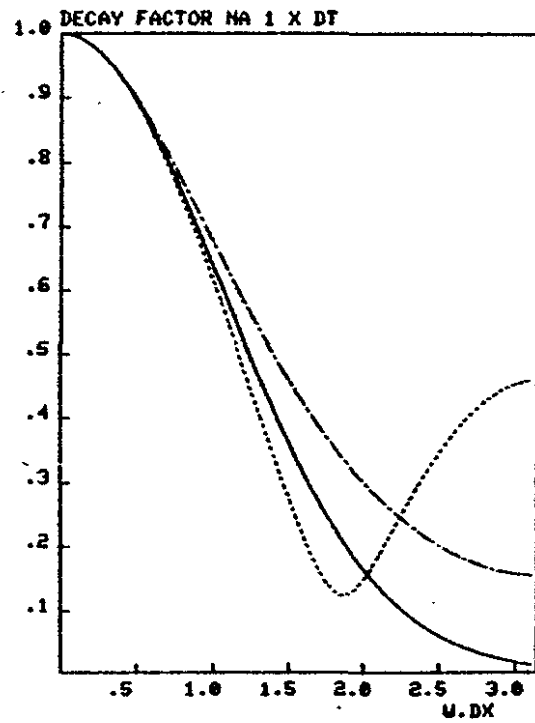


DX DT E
 PRRRRRRR? RRRRRRRR RRRRRRRR RRRRRRRR
 2000. 300. 3000. 1.

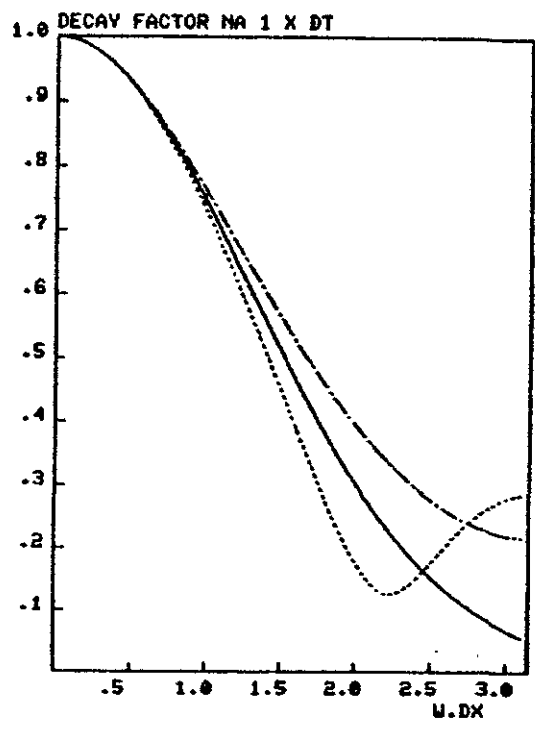
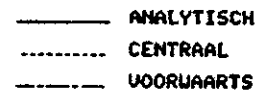
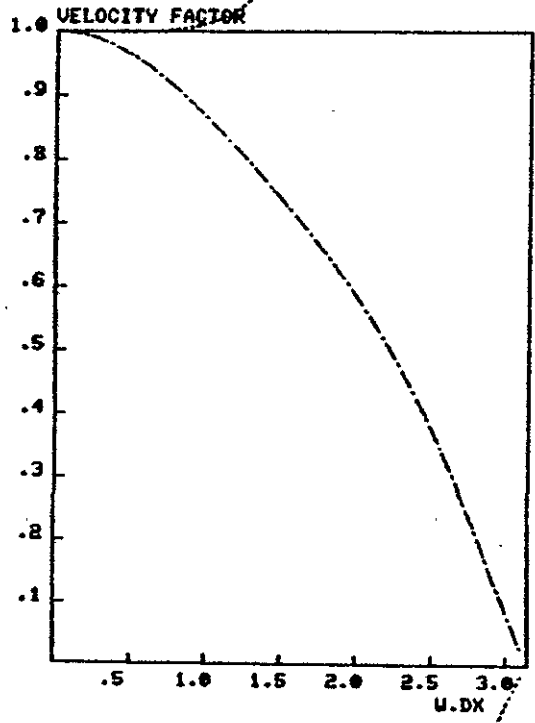
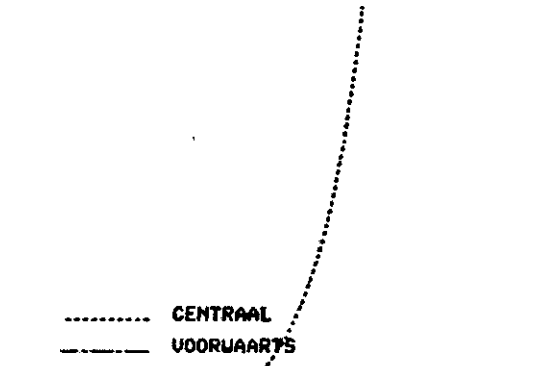
----- CENTRAAL
 - - - - - UOORUAARTS



----- ANALYTISCH
 - - - - - CENTRAAL
 - - - - - UOORUAARTS

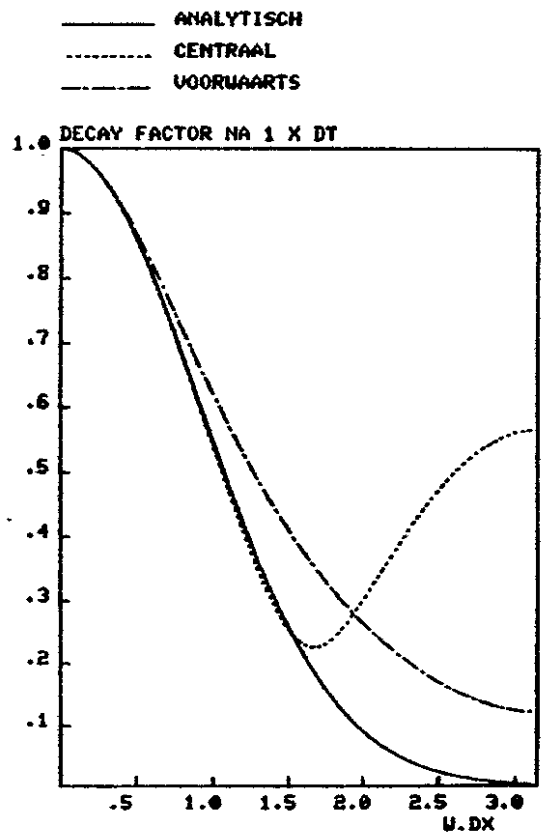
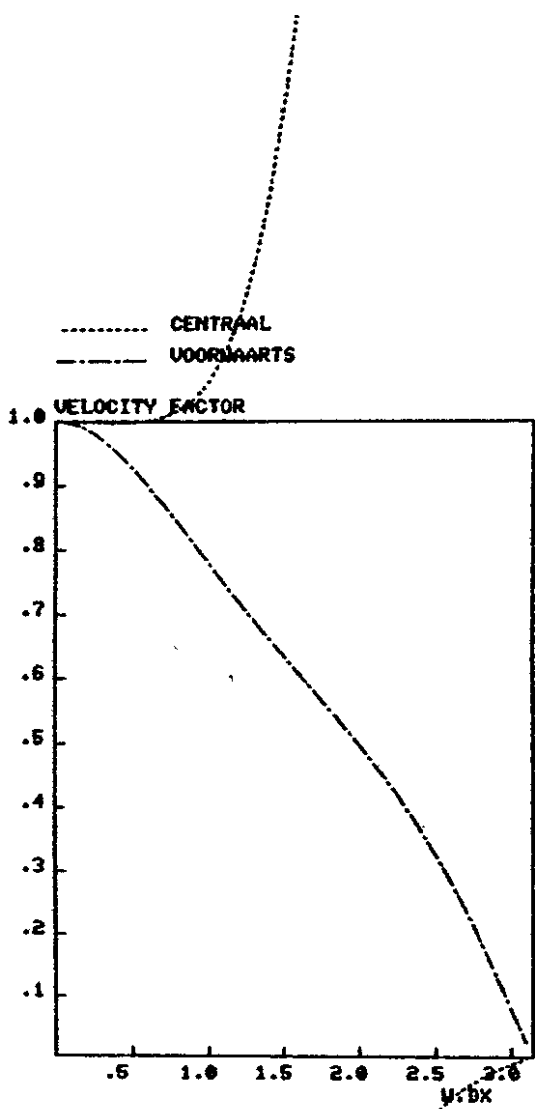


DX DT E U
 > 2000. 600. 3000. 1.

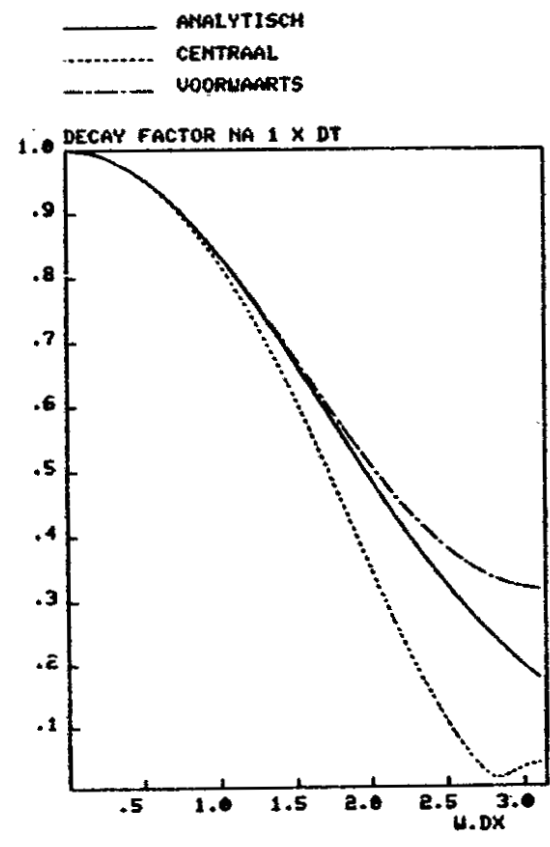
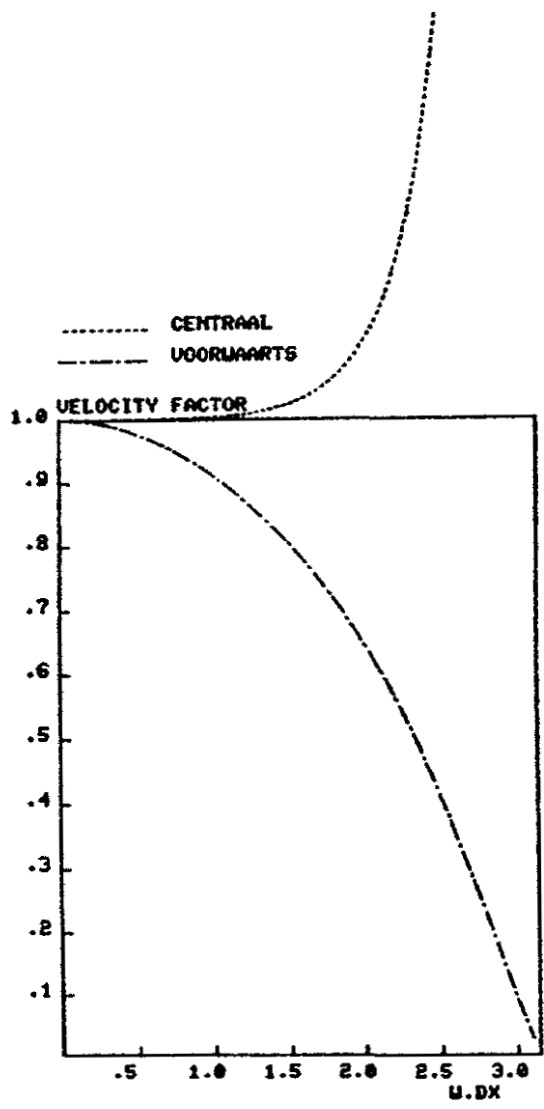


DX DT E U
 RRRRRRRR RRRRRRRR RRRRRRRR RRRRRRRR
 1000. 300. 1000. 1.

>

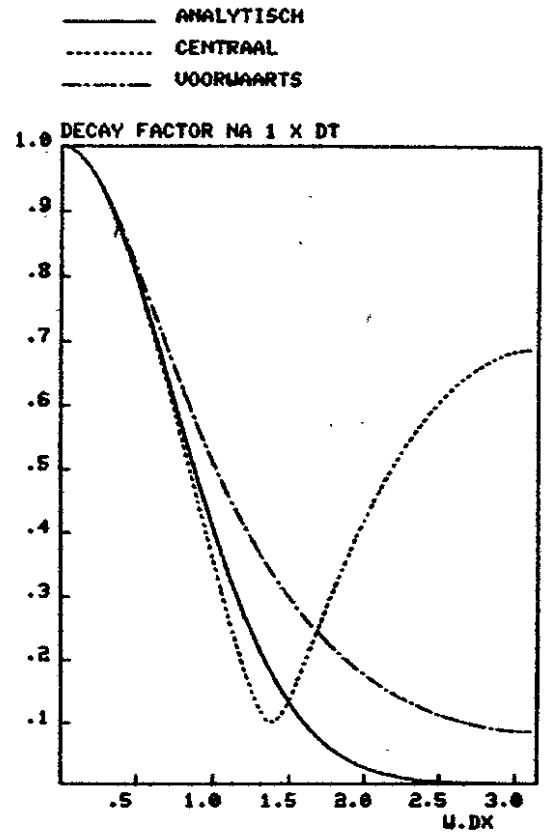
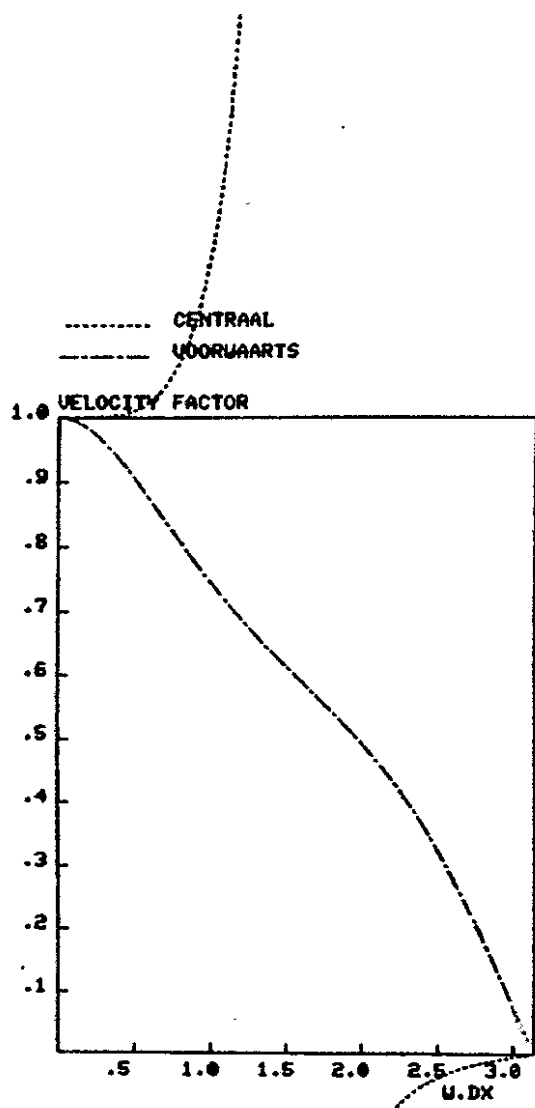


DX DT E U
 RRRRRRRR RRRRRRRR RRRRRRRR RRRRRRRR
 > 1000. 600. 1000. 1.



DX	DT	E	U
1000.	60.	3000.	1.

)

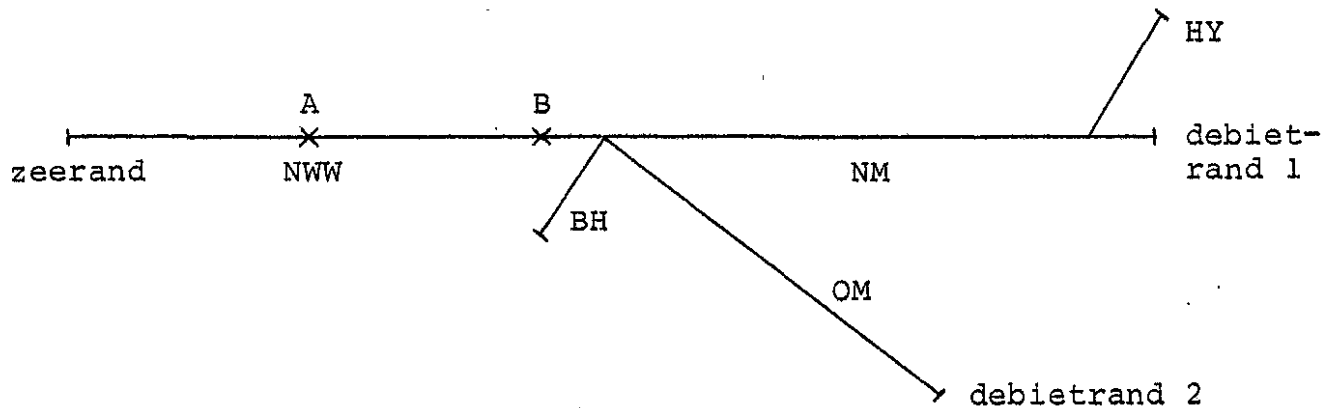


DX DT E U
 RPPPPPPRRR RPPPPPPRRR RPPPPPPRRR RPPPPPPRRR
 > 1000. 300. 3000. 1.

>

Deze bijlage bevat de resultaten van enkele van de gemaakte proefberekeningen met als doel enige numerieke effecten te illustreren.

De gebruikte schematisatie is ontleend aan de IMPLIC-schematisatie voor het noordelijk deltabekken en bevat de takken Nieuwe Waterweg, Nieuwe Maas, Oude Maas, Hollandsche IJssel en de Botlekhaven als volgt:



tak	taklengte	aantal vakken	gemiddelde vaklengte	kleinste vaklengte	grootste vaklengte
NWW	17039	7	2435	1969	3130
NM	23530	10	2353	1435	4957
OM	26476	7	3783	1765	5590
HY	17132	4	4283	2015	6095
BH	3400	1	3400	3400	3400

Een grafiek van het waterstandsverloop ter plaatse van de zeerand is weergegeven op figuur 1.

De debietranden 1 en 2 zijn vast ingesteld op 400 respectievelijk 1500 m³/s.

De berekeningsresultaten worden weergegeven op de punten A en B gelegen op 6115 respectievelijk 13909 m vanaf de zeerand.

Met bovenstaande gegevens als uitgangspunt zijn 5 berekeningen uitgevoerd als volgt:

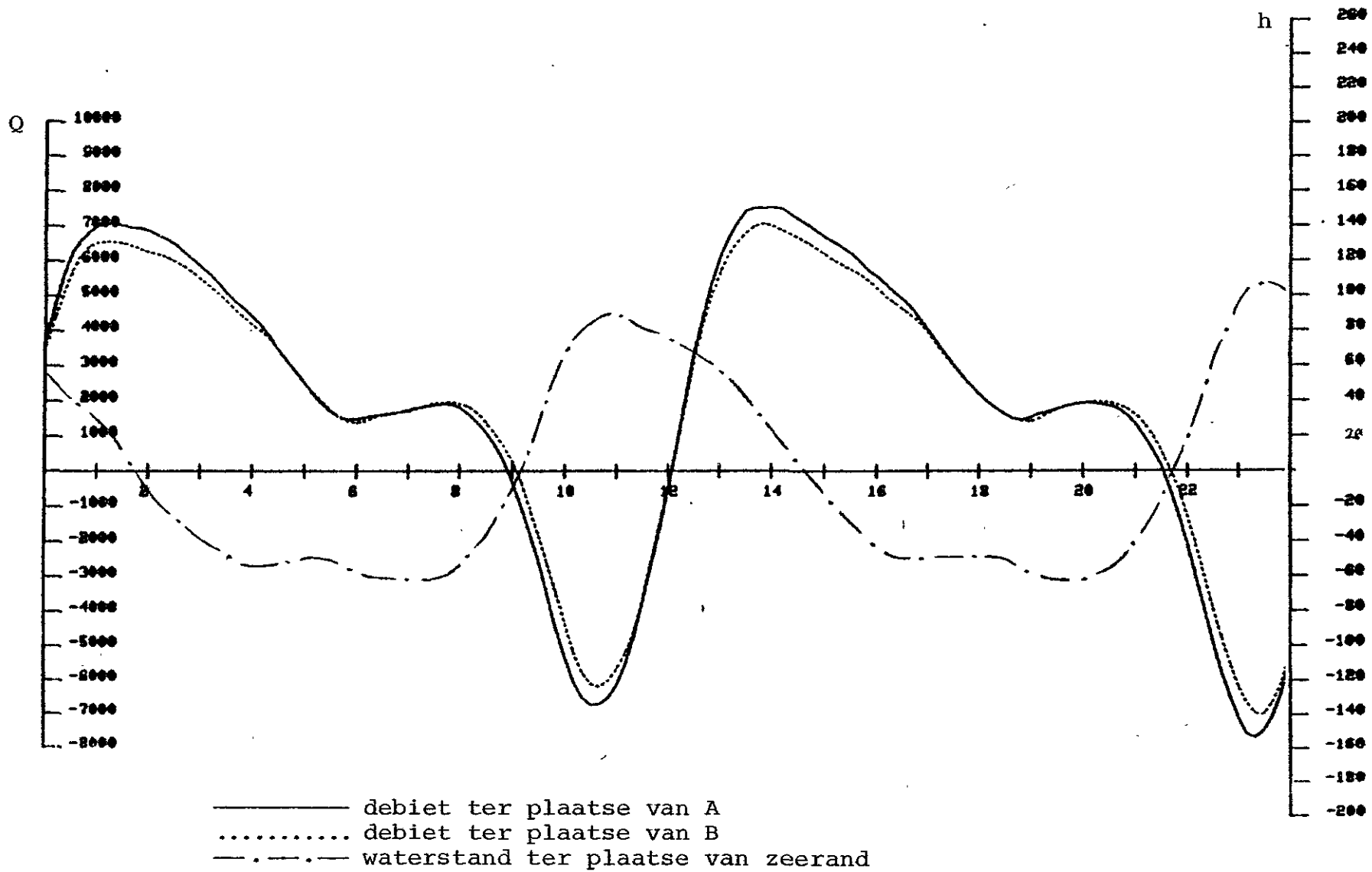
- som 1: $\alpha = 0$ (\equiv voorwaartse schema)
 $\Delta t = 10$ min.
- som 2: $\alpha = 0$
 $\Delta t = 5$ min.
- som 3: $\alpha = .5$ (\equiv centrale schema)
 $\Delta t = 5$ min.
- som 4: $\alpha = .5$
 $\Delta t = 10$ min.
 $\Delta x \approx 1200$ m
- som 5: $\alpha = 0$
 $\Delta t = 10$ min. } de vakken op tak NWW zijn ieder
 $\Delta x \approx 1200$ m } opgedeeld in twee gelijke delen.

De dispersiecoëfficiënt loopt bij deze berekeningen op tot circa $3500 \text{ m}^2/\text{s}$.

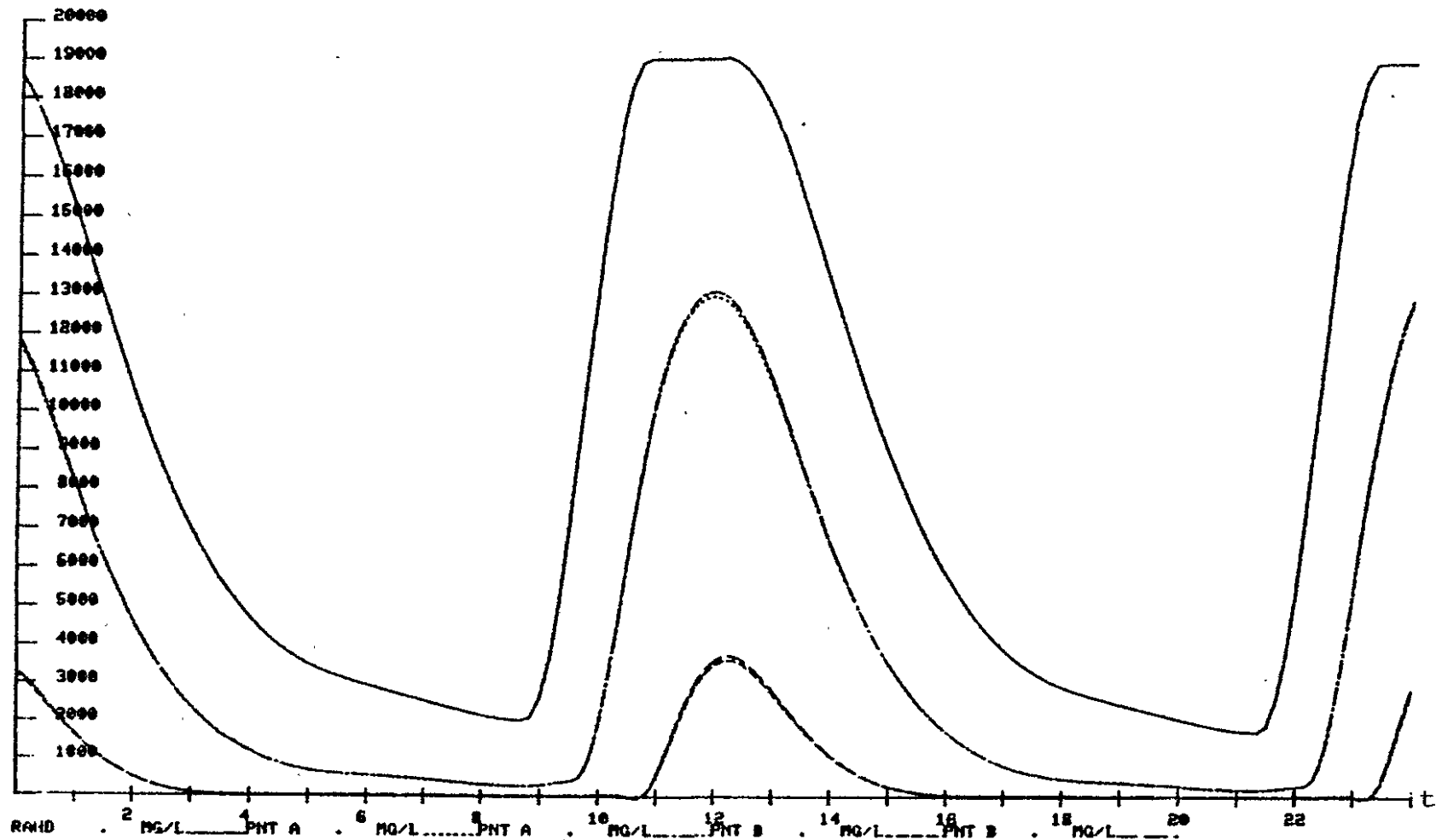
De berekeningsresultaten zijn weergegeven in de figuren 1 tot en met 5:

- figuur 2 illustreert het effect van het reduceren van de tijdstap van 10 tot 5 minuten (som 1 vs. 2);
- figuur 3 illustreert het effect van het (nauwkeuriger) centrale schema ten opzichte van het voorwaartse schema (som 2 vs. 3);
- figuur 4 illustreert het in paragraaf 8 genoemde oscilleren dat onder omstandigheden optreedt bij het centrale schema (som 4);
- figuur 5 illustreert het effect van het verkleinen van de ruimtestap (som 1 vs. 5).

In figuur 1 is naast de eerdergenoemde waterstand-voorwaarde het debietverloop ter plaatse van de presentatiepunten A en B weergegeven.

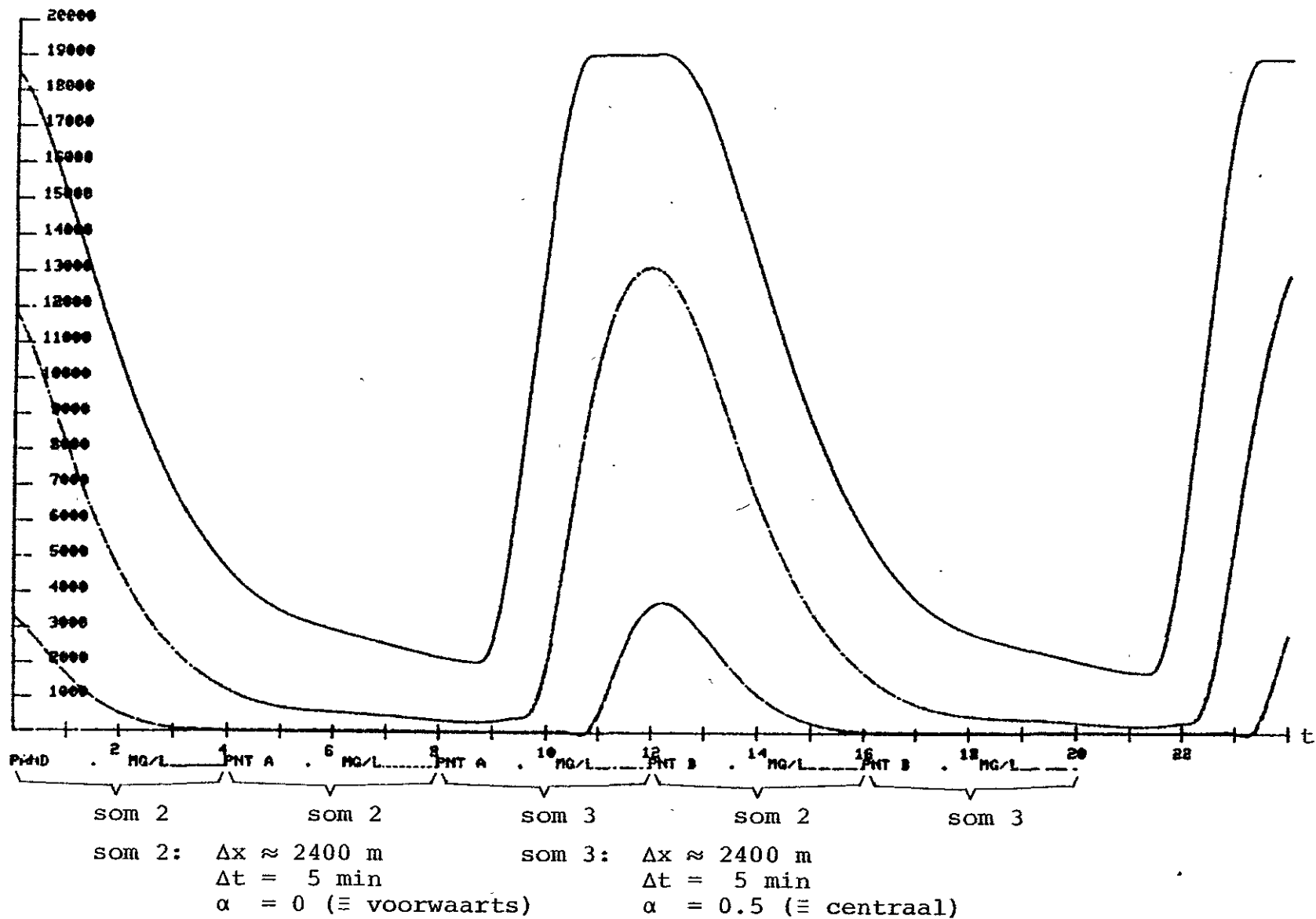


Figuur 1

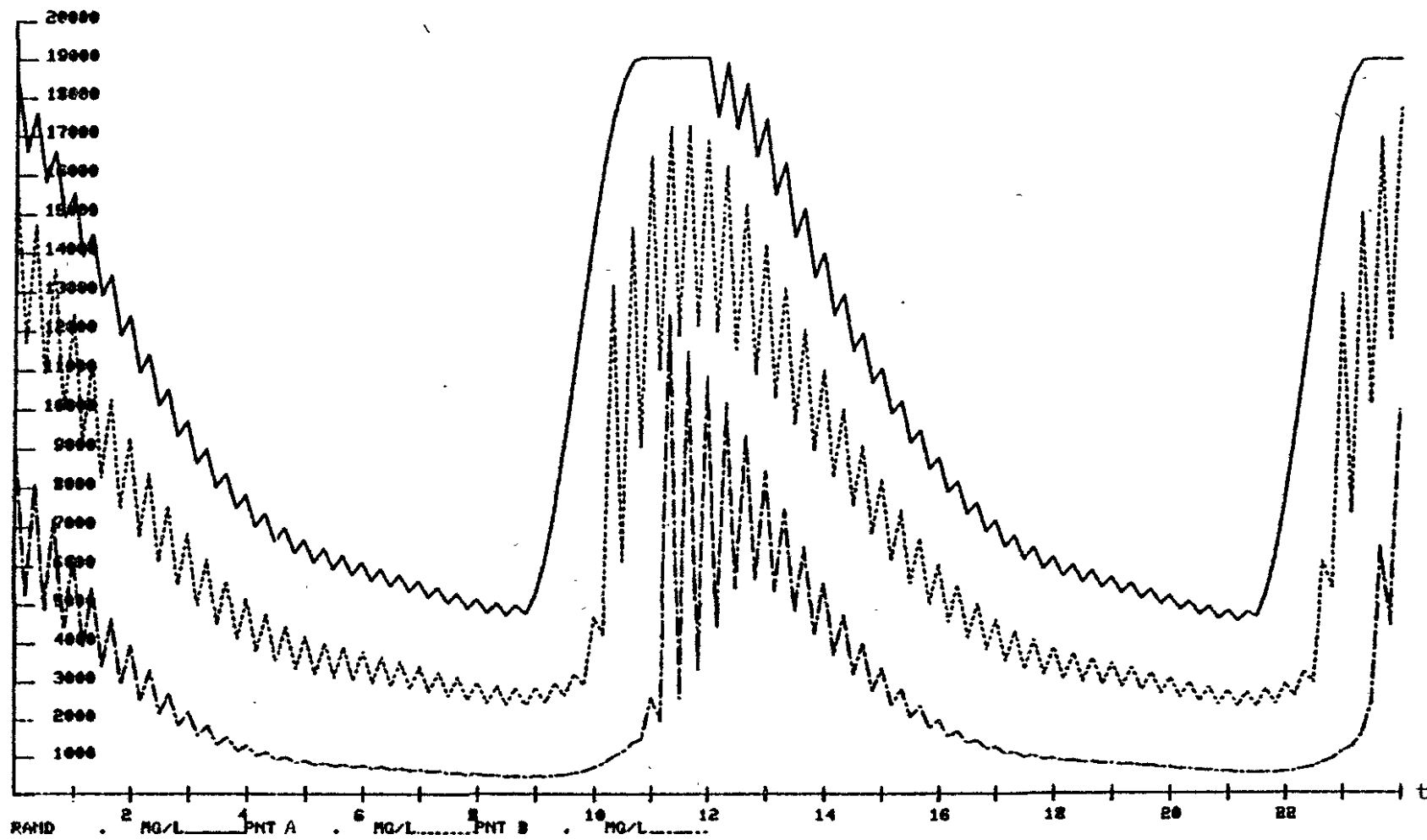


som 1		som 1		som 2		som 1		som 2	
som 1:		$\Delta x \approx 2400 \text{ m}$	som 2:		$\Delta x \approx 2400 \text{ m}$				
		$\Delta t = 10 \text{ min}$			$\Delta t = 5 \text{ min}$				
		$\alpha = 0$ (\equiv voorwaarts)			$\alpha = 0$				

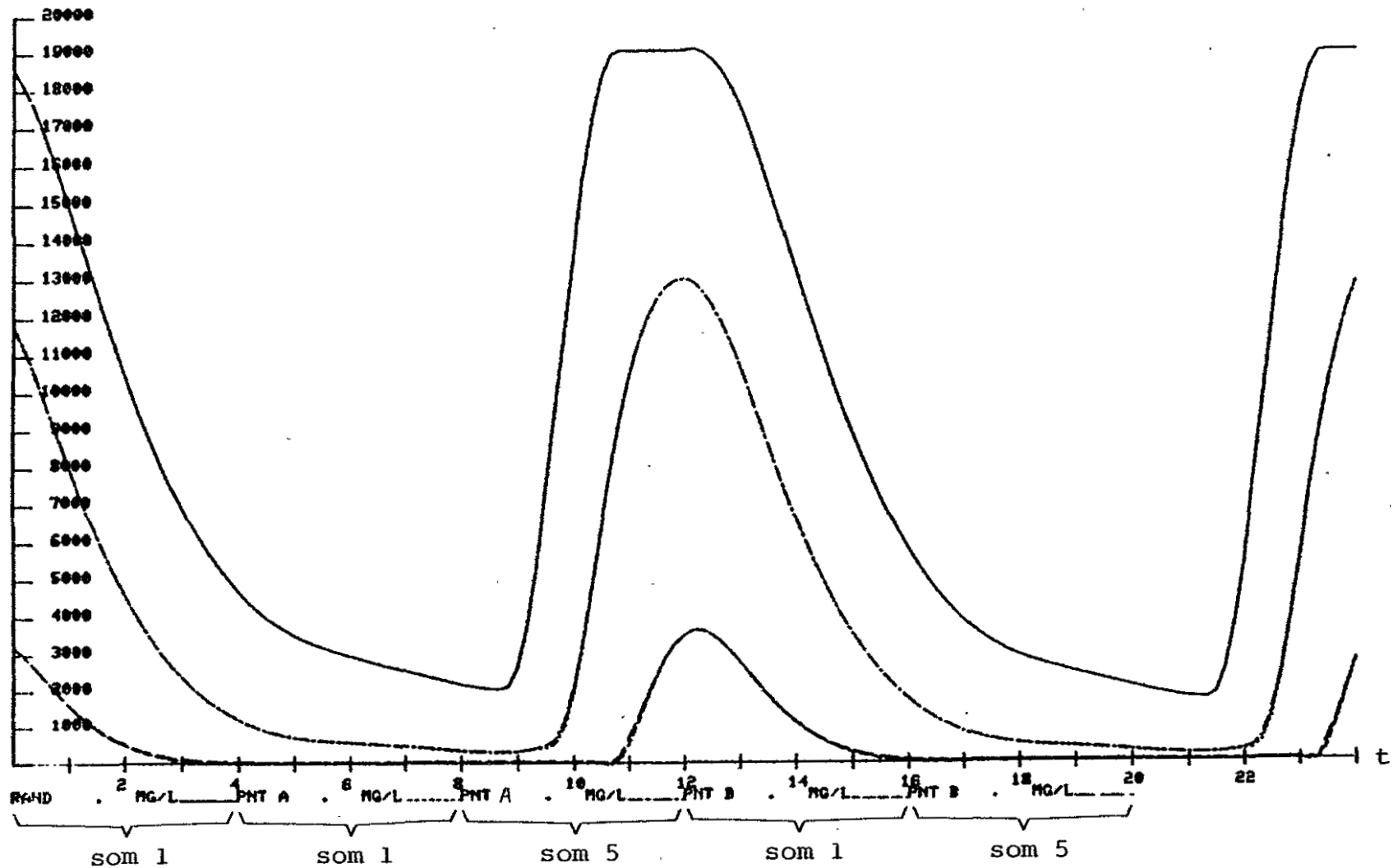
Figuur 2



Figuur 3



som 4: $\Delta x \approx 1200$ m
 $\Delta t = 10$ min
 $\alpha = 0.5$ (\equiv centraal)



som 1: $\Delta x \approx 2400$ m
 $\Delta t = 10$ min
 $\alpha = 0$ (\equiv voorwaarts)

som 5: $\Delta x \approx 1200$ m
 $\Delta t = 10$ min
 $\alpha = 0$

Figuur 5